4. Gibbs G.E. *Walsh spectrometry, a form of spectral analysis well suited to binary digital computation.* – NPL DES Rept. Teddington: National Phys. Lab., 1967. – 24 p.

5. Wagner J.H. *Ein Differential– und Integralkalkül in der Walsh-Fourier-Analysis mit Anwendungen*. – Köln, Opladen: Westdeutscher Verlag, 1974.

6. Голубов Б.И. *Элементы двоичного анализа. 2-е изд.* – URSS, 2007. – 203 с.

7. Stankovic R.S., Butzer P.L., Schipp F., Wade W.R., Su W., Endow Y., Fridli S., Golubov B.I., Pichler F. *Dyadic Walsh analysis from 1924 onwards Walsh-Gibbs-Butzer dyadic differentiation in science. V. 1. Foundations.* – Paris: Atlantis Press / Springer, 2015. – 455 p.

8. Stankovic R.S., Butzer P.L., Schipp F., Wade W.R., Su W., Endow Y., Fridli S., Golubov B.I., Pichler F. *Dyadic Walsh analysis from 1924 onwards Walsh-Gibbs-Butzer dyadic differentiation in science. Vol. 2. Extensions and generalizations* // Paris: Atlantis Press / Springer, 2015. – 360 p.

ON SOME RESULTS AND PROBLEMS FROM DIADIC ANALYSIS

B.I. Golubov

The report will provide an overview of the results related to dyadic analysis, some problems are formulated.

Keywords: orthonormal systems, dyadic analysis, Fourier-Walsh series, Walsh transform.

УДК 517.51

НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ НА ГИПЕРБОЛОИДЕ

Д.В. Горбачев[1], В.И. Иванов[2], О.И. Смирнов[3]

1 *dvgmail@mail.ru*; Тульский государственный университет
2 *ivaleryi@mail.ru*; Тульский государственный университет
3 *so.2@mail.ru*; Тульский государственный университет

Изучаются экстремальные задачи Турана, Фейера, Дельсарта, Логана и Бомана для преобразования Фурье на гиперболоиде $\mathbb{H}^{d-1}$ или на пространстве Лобачевского. С помощью метода усреднения по сфере эти задачи сводятся к аналогичным задачам для преобразования Якоби на полупрямой. Для их решения используются квадратурные формулы Гаусса и Маркова на полупрямой для целых функций экспоненциального типа по нулям функций Якоби.

Ключевые слова: гиперболоид, пространство Лобачевского, преобразование Фурье, экстремальные задачи Турана, Фейера, Дельсарта, Логана, Бомана, квадратурные формулы Гаусса и Маркова для целых функций экспоненциального типа.

Основные факты гармонического анализа на гиперболоиде или в пространстве Лобачевского можно найти в [1, гл. 9].

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 3$, $\mathbb{R}^{d-1}$ — действительное $(d-1)$-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_{d-1} y_{d-1}$ и нормой $|x| = \sqrt{(x, x)}$, $\mathbb{S}^{d-2} = \{x \in \mathbb{R}^{d-1} : |x| = 1\}$ — евклидова сфера, $\mathbb{R}^{d-1,1}$ — действительное d-мерное псевдоевклидово пространство с билинейной формой $[x, y] = -x_1 y_1 - \ldots - x_{d-1} y_{d-1} +$

$x_d y_d$, $\mathbb{H}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^{d-1,1} : [x,x] = 1,\, x_d > 0\}$ — верхняя пола двуполостного гиперболоида, $d(x,y) = \operatorname{arc\,cosh}[x,y] = \ln([x,y] + \sqrt{[x,y]^2 - 1})$ — расстояние между $x, y \in \mathbb{H}^{d-1}$, $\big(\mathbb{H}^{d-1}, d(\cdot,\cdot)\big)$ — пространство Лобачевского.

Пусть $r > 0$, $o = (0,\dots,0,1) \in \mathbb{H}^{d-1}$, $d(x,o) = d(x)$, $B_\tau = \{x \in \mathbb{H}^{d-1} : d(x) \le r\}$ — шар в пространстве Лобачевского.

Если $t > 0$, $\eta \in \mathbb{S}^{d-2}$, $x = (\sinh t\eta, \cosh t) \in \mathbb{H}^{d-1}$, то

$$d\mu(t) = \Delta(t)\,dt = 2^{d-2}\sinh^{d-2} t\,dt, \quad d\omega(\eta) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{d-2}|}\,d\eta, \quad d\nu(x) = d\mu(t)d\omega(\eta)$$

— меры Лебега на $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{S}^{d-2}$ и $\mathbb{H}^{d-1}$, соответственно. Вероятностная мера $d\omega$ инвариантна относительно группы вращений $SO(d-1)$, мера $d\nu$ инвариантна относительно группы гиперболических вращений $SO_0(d-1,1)$.

Если $\lambda \in \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, $\xi \in \mathbb{S}^{d-2}$, $y = (\lambda,\xi) \in \Omega^{d-1} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{d-2}$, то

$$d\sigma(\lambda) = s(\lambda)\,d\lambda = 2^{5-2d}\Gamma^{-2}\Big(\frac{d-1}{2}\Big)\left|\frac{\Gamma\big(\frac{d-2}{2} + i\lambda\big)}{\Gamma(i\lambda)}\right|^2 d\lambda, \quad d\tau(y) = d\sigma(\lambda)d\omega(\xi)$$

— меры Лебега на $\mathbb{R}_+$ и Ω^{d-1}.

Пусть $X = \mathbb{R}_+, \mathbb{S}^{d-1}, \mathbb{H}^{d-1}, \Omega^{d-1}$, $d\rho$ — мера на X, $1 \le p < \infty$, $L^p(X, d\rho)$ — банахово пространство с нормой $\|f\|_{p,d\rho} = \Big(\int_X |f|^p\,d\rho\Big)^{1/p}$, $C_b(X)$ — пространство непрерывных ограниченных на X функций f с нормой $\|f\|_\infty = \sup_X |f|$, $\operatorname{supp} f$ — носитель функции f.

Гармонический анализ в $L^2(\mathbb{H}^{d-1}, d\nu)$ и $L^2(\Omega^{d-1}, d\tau)$ осуществляется с помощью прямого и обратного преобразований Фурье

$$\mathscr{F} f(y) = \int_{\mathbb{H}^{d-1}} f(x)[x,\xi']^{-\frac{d-2}{2} - i\lambda}\,d\nu(x), \quad \mathscr{F}^{-1} g(x) = \int_{\Omega^{d-1}} g(y)[x,\xi']^{-\frac{d-2}{2} + i\lambda}\,d\tau(y),$$

где $\xi' = (\xi, 1)$, $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Пусть $\chi_r(t)$ — характеристическая функция отрезка $[0,r]$, $F(a,b,c;z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса,

$$\varphi_\lambda(t) = \varphi_\lambda^{((d-3)/2,-1/2)}(t) = F\left(\frac{(d-2)/2 + i\lambda}{2}, \frac{(d-2)/2 - i\lambda}{2}; \frac{d-1}{2}; -(\operatorname{sh} t)^2\right)$$

— функция Якоби, $w(t) = \varphi_0^2(t)\Delta(t)$ — модифицированный вес, $u_\lambda(t) = \varphi_\lambda(t)/\varphi_0(t)$,

$$Qg(\lambda) = \int_{\mathbb{S}^{d-2}} g(y)\,d\omega(\xi), \; y = (\lambda,\xi) \in \Omega^{d-1}. \tag{1}$$

— оператор усреднения по сфере.

Задача Турана. Вычислить величину

$$T(r, \mathbb{H}^{d-1}) = \sup Q(\mathscr{F} f)(0),$$

если

$$f \in C_b(\mathbb{H}^{d-1}), \quad f(o) = 1, \quad \operatorname{supp} f \subset B_r, \quad \mathscr{F} f(y) \ge 0.$$

Задача Фейера. Вычислить величину

$$F(r,\mathbb{R}_+) = \sup Qg(0),$$

если

$$g = \mathscr{F} f \in L_1(\Omega^{d-1}, d\tau), \ g(y) \ge 0, \ f \in C_b(\mathbb{H}^{d-1}), \ f(o) = 1, \ \operatorname{supp} f \subset B_r. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть $d \ge 3$, $r > 0$. Тогда в задачах Турана и Фейера*

$$T(r,\mathbb{H}^{d-1}) = F(r,\mathbb{H}^{d-1}) = \int_0^{r/2} w(t)\,dt,$$

экстремальные функции единственны и имеют вид

$$f^*(x) = \frac{(\varphi_0\chi_{r/2} * \varphi_0\chi_{r/2})(d(x))}{\int_0^{r/2} w(t)\,dt}, \quad g^*(y) = a(r)\left(\frac{\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(r/2)}{\lambda^2}\right)^2,$$

где $x \in \mathbb{H}^{d-1}$, $y = (\lambda,\xi) \in \Omega^{d-1}$ и $a(r) = w^2(r/2)/\int_0^{r/2} w(t)\,dt$.

Задача Дельсарта. Вычислить величину

$$D(r,s,\mathbb{H}^{d-1}) = \sup \mathscr{F}^{-1} g(o) = \sup f(o),$$

если

$$g = \mathscr{F} f \in L_1(\Omega^{d-1}, d\tau), \quad Qg(0) = 1, \quad g(\lambda,\xi) \le 0, \ \lambda \ge s,$$
$$f \in C_b(\mathbb{H}^{d-1}), \quad \operatorname{supp} f \subset B_r, \quad f(x) \ge 0.$$

Теорема 2. *Пусть $d \ge 3$, $r > 0$, $\lambda_1' = \lambda_1'(r/2)$ — минимальный положительный нуль $\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(r/2)$ по λ. Тогда в задаче Дельсарта*

$$D(r,\lambda_1'(r/2),\mathbb{H}^{d-1}) = \left(\int_0^{r/2} w(t)\,dt\right)^{-1},$$

единственная экстремальная функция имеет вид

$$g^*(y) = \frac{b(r)\left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(r/2)\right)^2}{\lambda^4\left(1-(\lambda/\lambda_1')^2\right)},$$

где $y = (\lambda,\xi) \in \Omega^{d-1}$ и

$$b(r) = \left(\frac{1}{w(r/2)}\int_0^{r/2} w(t)\,dt\right)^{-2}.$$

Пусть $y = (\lambda,\xi) \in \Omega^{d-1}$, $g(y)$ — действительная непрерывная функция на Ω^{d-1},

$$\Lambda(g) = \sup\{\lambda > 0 : g(\lambda,\xi) > 0, \ \xi \in \mathbb{S}^{d-2}\}.$$

Задача Логана. Вычислить величину

$$L(r,\mathbb{H}^{d-1}) = \inf \Lambda(g),$$

если

$$g = \mathscr{F} f \in L_1(\Omega^{d-1}, d\tau), \quad g(y) \not\equiv 0, \quad f \in C_b(\mathbb{H}^{d-1}), \quad \operatorname{supp} f \subset B_r, \quad f(x) \geq 0.$$

Теорема 3. *Пусть $d \geq 3$, $r > 0$, $\lambda_1 = \lambda_1(r/2)$ — минимальный положительный нуль $\varphi_\lambda(r/2)$ по λ. Тогда в задаче Логана*

$$L(r, \mathbb{H}^{d-1}) = \lambda_1,$$

единственная с точностью до положительного множителя экстремальная функция имеет вид

$$g^*(y) = \frac{\varphi_\lambda^2(r/2)}{1 - (\lambda/\lambda_1)^2}, \quad y = (\lambda, \xi) \in \Omega^{d-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad \xi \in \mathbb{S}^{d-2}.$$

Задача Бомана. Вычислить величину

$$B(r, \mathbb{H}^{d-1}) = \inf \int_{\Omega^{d-1}} \Big(\lambda^2 + \Big(\frac{d-2}{2}\Big)^2\Big) g(y)\, d\tau(y),$$

если g удовлетворяет условиям (2), $y = (\lambda, \xi) \in \Omega^{d-1}$.

Теорема 4. *Пусть $d \geq 3$, $r > 0$, $\lambda_1 = \lambda_1(r/2)$ — минимальный положительный нуль $\varphi_\lambda(r/2)$ по λ. Тогда в задаче Бомана*

$$B(r, \mathbb{H}^{d-1}) = \lambda_1^2 + \Big(\frac{d-2}{2}\Big)^2,$$

единственная экстремальная функция имеет вид

$$g^*(y) = \frac{1}{c(r)} \Big(\frac{\varphi_\lambda(r/2)}{\lambda_1^2 - \lambda^2}\Big)^2,$$

где $y = (\lambda, \xi) \in \Omega^{d-1}$,

$$c(r) = \frac{\frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial \lambda}(r/2)}{2\lambda_1 \Delta(r/2)\, \frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial t}(r/2)}.$$

Для решения экстремальных задач мы применяем операторы усреднения по сфере $Qg(\lambda)$ (1) и

$$Pf(t) = \begin{cases} \int_{\mathbb{S}^{d-2}} f(x)\, d\omega(\eta), & x = (\sinh t\,\eta, \cosh t) \in \mathbb{H}^{d-1}, t > 0, \\ f(o), & t = 0, \end{cases}$$

и сводим их к аналогичным экстремальным задачам для преобразования Якоби на полупрямой. Общие оценки в одномерных задачах получаем с помощью квадратурных формул Гаусса и Маркова на полупрямой для целых функций экспоненциального типа по нулям функций Якоби [1]. Экстремальные функции строим опираясь на анализ условий равенства в неравенствах, получаемых при применении квадратурных формул [2, 3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00308).

Литература

1. Горбачев Д. В., Иванов В. И. *Квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля, точные для целых функций экспоненциального типа* // Матем. сб. – 2015. – Т. 206. – № 8.– С. 63–98.

2. Горбачев Д. В., Иванов В. И. *Экстремальная задача Бомана для преобразования Якоби* // Тр. ИММ УрО РАН. – 2016. – Т. 22. – № 4. – С. 126–135.

3. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Smirnov O. I. *The Delsarte extremal problem for the Jacobi transform* // Math. Notes. – 2016. – V. 100. – № 5. – P. 677–686.

SOME EXTREMAL PROBLEMS FOR FOURIER TRANSFORM ON HYPERBOLOID

D.V. Gorbachev, V.I. Ivanov, O.I. Smirnov

We study the Turán, Fejér, Delsarte, Logan and Boman extremal problems for the Fourier transform on the hyperboloid $\mathbb{H}^{d-1}$ or Lobachevskii space. By the averaging method over the sphere we reduce these problems to the problems for the Jacobi transform on the half-line. To solve them we apply Gauss and Markov quadrature formulas on the half-line for entire functions of exponential type at zeros of the Jacobi functions.

Keywords: hyperboloid, Lobachevskii space, Fourier transform, Turán, Fejér, Delsarte, Logan and Boman extremal problems, Gauss and Markov quadrature formulas for entire functions of exponential type.

УДК 517.54

ПОЛУГРУППЫ ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПОЛОСЫ И ПОЛУПЛОСКОСТИ

В.В. Горяйнов[1]

1 *goryainov_vv@hotmail.com*; Московский физико-технический институт (государственный университет)

Изучается полугруппа голоморфных отображений полосы в себя и изоморфная ей полугруппа голоморфных отображений правой полуплоскости в себя. Для голоморфных отображений полосы требуется выполнение условия, которое является аналогом гидродинамической нормировки. Получены теоремы искажения для этих отображений и выделены условия, при которых существуют области однолистности. Дано описание класса отображений, которые допускают вложение в однопараметрические полугруппы. Получен аналог уравнения Лёвнера-Куфарева для изучаемой полугруппы отображений и установлена теорема существования и единственности решений для этого уравнения.

Ключевые слова: голоморфное отображение, теоремы искажения, области однолистности, однопараметрическая полугруппа, эволюционное семейство, эволюционное уравнение.

Пусть f — голоморфное отображение полосы

$$\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C}\colon\ -\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2\}$$